ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THANH TÂM

BÀI TOÁN TỐI ƯU VỚI RÀNG BUỘC LÀ BÀI TOÁN BÙ TỔNG QUÁT

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THANH TÂM

BÀI TOÁN TỐI ƯU VỚI RÀNG BUỘC LÀ BÀI TOÁN BÙ TỔNG QUÁT

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60. 46. 01. 02

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. NGUYỄN XUÂN TẤN

THÁI NGUYÊN - 2017

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả trong luận văn là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Các số liệu, kết quả nêu trong luận văn được tôi tìm đọc và trích dẫn từ các tài liệu [2], [11].

Thái Nguyên, ngày tháng năm 2017

Người viết luận văn

Nguyễn Thanh Tâm

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến người thầy của mình, trong một thời gian dài đã từng bước dẫn dắt tác giả làm quen với bộ môn lý thuyết tối ưu, đã truyền cho tác giả những kinh nghiệm trong nghiên cứu khoa học, động viên khích lệ tác giả vượt qua những khó khăn trong chuyên môn và cuộc sống.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các giáo sư, các thầy, cô giáo của Viện Toán học và trường Sư Phạm Thái Nguyên, những người đã tận tình giảng dạy, đã tạo điều kiện và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Cuối cùng, tác giả muốn bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới anh chị em học viên cao học Toán giải tích k23, những người thân trong gia đình của mình đã luôn động viên, chia sẻ và khích lệ để tác giả có thể hoàn thành công việc học tập và nghiên cứu của mình.

Thái Nguyên, ngày tháng năm 2017

Người viết luận văn

Nguyễn Thanh Tâm

Mục lục

Mở đầu

Bài toán bù có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực: kinh tế, tài chính, kỹ thuật, vật lý, sinh thái và điều khiển tối ưu,... Việc nghiên cứu bài toán bù hiện nay vẫn đang là vấn đề thời sự, đặc biệt là việc tìm ra phương pháp giải bài toán bù đang được nhiều nhà toán học quan tâm .

Bài toán bù nguyên gốc được phát biểu : Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,
Tìm $\bar{x} \in \mathbb{R}^n_+$ sao cho

$$f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n_+ \text{ và } \quad < \bar{x}, f(\bar{x}) >= 0, \tag{0.1}$$

trong đó $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclid n - chiều và
$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n_+, x_i \geq 0, i = 1, 2, ...n\}$

Trong những năm gần đây người ta tổng quát thành bài toán: Tìm $\bar{x} \in \mathbb{R}^n_-$ sao cho $g(\bar{x}) \geq 0, h(\bar{x}) \geq 0$ và $< g(\bar{x}), h(\bar{x}) >= 0$. Mục đích của luận văn này là viết một cách tổng quan về việc giải bài toán tối ưu với ràng buộc tổng quát như sau: Cho $C \ \subseteq \mathbb{R}^n$, tập đóng $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, bài toán tìm $\tilde{x} \in C \cap \tilde{S}$ sao cho

$$\varphi(\tilde{x}) = \min_{y \in \tilde{C}} \varphi(y), \tilde{C} = C \cap \tilde{S}, \tag{0.2}$$

trong đó C là tập đóng, lồi trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$, $\tilde{S} = \tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2$ và

$$\begin{aligned} &\tilde{S}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \tilde{g}(x) \leq 0, \tilde{h}(x) = 0 \right\}, \\ &\tilde{S}_2 = \{ x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, h(x) \leq 0, \langle g(x), h(x) \rangle_{\mathbb{R}^q} = 0 \} \end{aligned} \tag{0.3}$$

các hàm thực $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \tilde{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \tilde{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, g và h: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ là liên tục, ký hiệu $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \leq 0$ có nghĩa là $y_i \leq 0, \forall i = 1, 2, ...n$. Ta giả thiết nghiệm của các bài toán (0.1), (0.2) và (0.3) là khác rỗng.

Trường hợp khi $m = n, g(x) = -x, h(x) = -F(x)$, với $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ affin, nghĩa là

$$F(x) = Mx + q, M \in \mathbb{R}^{n\times n}, q \in \mathbb{R}^n,$$

bài toán (01) được gọi là bài toán bù tuyến tính, ký hiệu bởi LCP(q,M). Tìm hiểu nghiệm của các bài toán trên ta đã thu được kết quả sau.

Định lý 0.1. *[8] Khi $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là P - ma trận với tất cả các định thức con chính của M dương thì LCP(q,M) có một nghiệm với $q \in \mathbb{R}^n$.*

Định lý 0.2. *[8] Nếu q không âm thì bài toán bù tuyến tính $LCP(q, M)$ luôn giải được và $x = 0$ là một nghiệm tầm thường của nó.*

Nghiên cứu mối quan hệ giữa bài toán bù tuyến tính và bài toán bất đẳng thức biến phân, ký hiệu bởi VI(K,F), là bài toán tìm một vectơ $x \in K \subset \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\langle y - x, F(x)\rangle \geq 0, \forall y \in K$$

ở đây $F : K \to \mathbb{R}^n$ là hàm liên tục và K là tập đóng, lồi, ta có thêm được kết quả sau.

Định lý 0.3. *[8] Nếu $F = Mx + q, M \in \mathbb{R}^{n\times n}, q \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n_+$ thì $\mathrm{VI}(F, \mathbb{R}^n_+)$ và bài toán bù tuyến tính LCP(q,M) có nghiệm hoàn toàn trùng nhau.*

Trường hợp khi $n = m, g(x) = -x, h(x) = -F(x)$ với F là ánh xạ phi tuyến từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^n$, bài toán (0.1) được gọi là bài toán bù phi tuyến, ký hiệu bởi NCP(F), đó là bài toán tìm vectơ $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$x \geq 0, F(x) \geq 0, \langle x, F(x) \rangle = 0, \tag{0.4}$$

hiện nay các nhà khoa học đã tìm ra rất nhiều phương pháp giải cho các loại bài toán này. Tất cả các phương pháp đưa ra đều dẫn tới giải một bài toán cực tiểu hoặc một hệ phương trình tương đương.

Nhiệm vụ của luận văn là giải bài toán tối ưu với ràng buộc là bài toán bù tổng quát bằng phương pháp hiệu chỉnh. Trước hết ta nhắc lại một số phương pháp giải bài toán bù tổng quát trên.

1. Phương pháp sử dụng hàm khoảng

Ý tưởng của phương pháp này là biến đổi bài toán bù phi tuyến NCP(F) về bài toán tối ưu qua việc sử dụng các hàm khoảng. Công cụ thuận tiện để thiết lập hàm khoảng là C - hàm, đó là hàm $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các tính chất:

$$\phi(a, b) = 0 \Leftrightarrow ab = 0, a \geq 0, b \geq 0.$$

Ta có một số C - hàm sau:

1. $\phi_{NR}(a, b) = \min\{a, b\}$;
2. $\phi_{MS}(a, b) = ab + \frac{1}{2\alpha}(max\{0, a - \alpha b\}^2 - a^2 + \max\{0, b - \alpha a\}^2 - b^2), \alpha > 1$;
3. $\phi_{FB}(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b$.

Hàm khoảng được xây dựng trên hàm ϕ_{NR} được gọi là hàm số dư tự nhiên. Hàm ϕ_{FB} không âm trên $\mathbb{R}^2$ và hàm khoảng được xây dựng trên nó gọi là hàm Lagrange ẩn được đưa vào bởi các nhà khoa học như Mangasarian và Solodov. Hàm ϕ_{FB} được gọi là hàm Fischer. Gần đây, dựa trên hàm ϕ_{FB} nhiều nhà khoa học đã mở rộng nghiên cứu và đưa ra một số hàm mới có tính chất tốt hơn. Luo và Tseng đã đưa ra một lớp các hàm khoảng mới $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\tilde{f}(x) = \psi_0 \left(\langle x, F(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} \right) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \left(-x_i, -F_i \right),$$

ở đây $\psi_0 :\to [0, \infty)$ và $\psi_i : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)\,, i = 1, 2, ..., n$ là các hàm liên tục. Ý tưởng mới này được Kanzow C., Yamashita N. và Fukushima M. [10] sử dụng để xây dựng hàm khoảng mới.

2. Phương pháp hiệu chỉnh

Ta sử dụng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov bằng cách nhiễu hàm ban đầu thành một dãy các bài toán đặt chỉnh. Lược đồ hiệu chỉnh Tikhonov trong [5], [6] đối với bài toán bù bao gồm việc giải dãy các bài toán:

$$x \geq 0, F_\varepsilon(x) \geq 0, \langle x, F_\varepsilon(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0, \qquad (0.5)$$

ở đây, $F_\varepsilon(x) = F(x) + \varepsilon x$ và ε là tham số dương hội tụ tới 0.

3. Phương pháp kết hợp hàm khoảng và hiệu chỉnh

Để giải bài toán ta dựa trên hàm H là hàm đi từ không gian $\mathbb{R}^{n+1}$ tới $\mathbb{R}^{n+1}$, được xây dựng bởi

$$H\left(\varepsilon, z\right) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = 0, x \in S^0, \qquad (0.6)$$

trong đó S^0 là tập nghiệm của (0.4),

$$z := (\varepsilon, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, H(\varepsilon, z) := \langle \varepsilon, G(\varepsilon, z) \rangle$$